

# 君もケプラー

H18 日数教東京大会ワークショップ

太陽系の運行の秘密を対数で発見しよう。



# ウォーミングアップ 人間の感覚と対数

## —対数による線形化—

X横軸	音名	階名	周波数	対数 y縦軸
13	ド	A	440.000	2.6435
12	シ	G#	415.305	2.6185
11		G	391.995	2.5933
10	ラ	F#	369.994	2.5682
9		F	349.228	2.5431
8		E	329.665	2.5181
7	ソ	D#	311.127	2.4929
6		D	293.665	2.4679
5	ファ	C#	277.183	2.4428
4	ミ	C	261.626	2.4177
3	レ	H	246.942	2.3926
2		B	233.082	2.3675
1	ド	A	220.000	2.3424

# 電卓操作その1

```

1: Edit
2: SortA()
3: SortD()
4: CirList
5: SetUPEditor

```

L1	L2	L3	1
████████	-----	-----	

L1() =

log(L2) → L3  
 (2.643452676 2...

L1	L2	L3	3
1	220	████████	
2	233.08		
3	246.94		
4	261.63		
5	277.18		
6	293.67		
7	311.13		

L3() =

L1	L2	L3	3
1	220	2.34242	
2	233.08	2.3675	
3	246.94	2.3926	
4	261.63	2.4177	
5	277.18	2.4428	
6	293.67	2.4679	
7	311.13	2.4929	

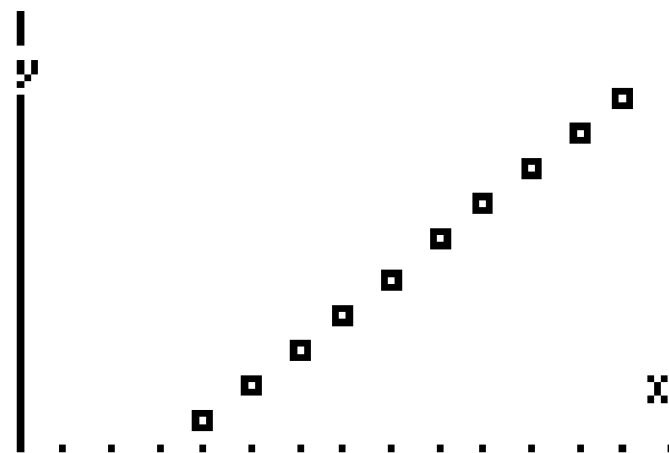
L3() = 2.342422680...

# 電卓操作その2

```
Plot1 Plot2 Plot3
Off Off Off
Type: [Area] [Line] [Bar]
      [Line] [Bar] [Line]
Xlist:L1
Ylist:L2
Mark: [Square] + .
```

```
Plot1 Plot2 Plot3
Off Off Off
Type: [Area] [Line] [Bar]
      [Line] [Bar] [Line]
Xlist:L1
Ylist:L3
Mark: [Square] + .
```

```
WINDOW
Xmin=0
Xmax=14
Xscl=1
Ymin=2.4
Ymax=2.7
Yscl=1
Xres=1
```



音階と「周波数の対数」のグラフは、きれいな直線となる

# ケプラーの法則とは

## 第一法則

面積速度一定

## 第二法則

惑星は太陽を一つの焦点とする

楕円軌道を描く

## 第三法則

軌道半径の三乗と公転周期の二乗は比例する

# 太陽系のデータ

①軌道半径R      ② 公転周期T

× 10<sup>8</sup> km

水星	0. 5 7 9	8 7. 9 7 日
金星	1. 0 8 2	2 2 4. 7 0 日
地球	1. 4 9 6	3 6 5. 2 6 日
火星	2. 2 7 9	6 8 6. 9 8 日
木星	7. 7 8 3	1 1. 8 3 年 (4317.95) 日
土星	1 4. 2 9 4	2 9. 4 6 年 (10752.9) 日
天王星	2 8. 7 5 0	8 4. 0 2 年 (30667.3) 日
海王星	4 5. 0 4 4	1 6 4. 7 7 年 (60141.05) 日
冥王星	5 9. 1 5 1	2 4 7. 8 0 年 (90477) 日

注:この時点では、冥王星は、まだ太陽系の惑星の一員

ケプラーの第三法則をグラフ電卓で確認しよう。

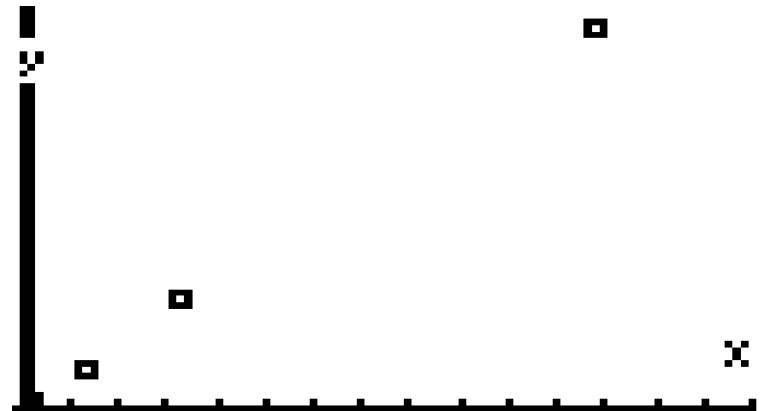
①軌道半径R ② 公転周期T ③ ②÷①  
三乗 の二乗

水星	0. 1941	7738.7	39869
金星	1. 26677	50490	39859
地球	3. 3481	133415	39848
火星	11. 837	471942	39871
木星	471. 46	1860000	39547
土星	2920. 5	1169000000	39590
天王星	23764	9400000000	39577
海王星	913930	36200000000	39576
冥王星	206960	81900000000	39554

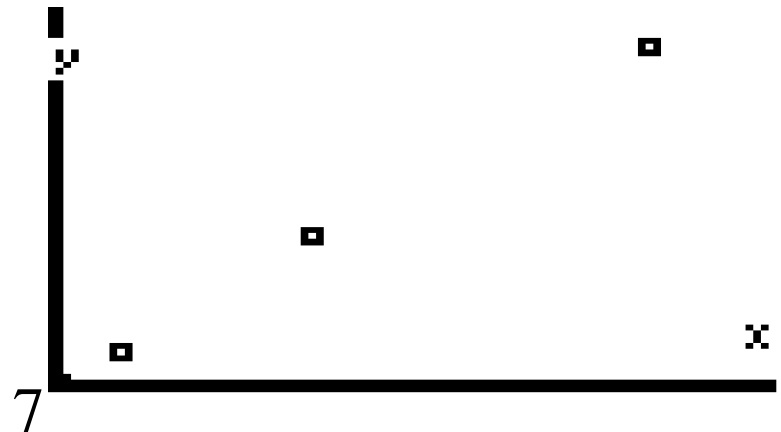
# 二乗三乗を直接プロット

(注 二乗と三乗が比例することが分かっているとしても大変な計算  
グラフ電卓でも一つの画面に収まらない  
ケプラーはどうやって発見したのだろう?)

```
WINDOW
Xmin=-.1
Xmax=15
Xscl=1
Ymin=-.1
Ymax=500000
Yscl=1
Xres=1
```



```
WINDOW
Xmin=-.1
Xmax=250000
Xscl=1
Ymin=-.1
Ymax=90000000000
Yscl=1
Xres=1
```





## 対数の性質を確認

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a x^n = n \log_a x$$

# 対数による線形化

$$y^m = x^n$$

対数を取ると  $\log_a y^m = \log_a x^n$

$$m \log_a y = n \log_a x$$

$\log_a y = Y, \log_a x = X$  とおくと

$$Y = \frac{n}{m} X$$

2つの量のべき乗が比例していると  
対数を取ると直線になる

# 対数で規則性を発見しよう

	③ R の対数	④ T の対数
水星	-0.2373	1.9443
金星	0.0342	2.3516
地球	0.1749	2.5626
火星	0.3577	2.8370
木星	0.8915	3.6353
土星	1.1551	4.0315
天王星	1.4586	4.4867
海王星	1.6536	4.7791
冥王星	1.7720	4.9564

# 電卓操作その3

$L_2 * 365 \rightarrow L_3$  ■

L1	L2	L3	3
.579	1	■■■■■	
1.082	1		
1.496	1		
2.279	1		
7.783	11.83		
14.294	29.46		
28.75	84.02		

L1	L2	L3	3
.579	1	87.97	
1.082	1	224.7	
1.496	1	365.26	
2.279	1	686.98	
7.783	11.83	4317.95	
14.294	29.46	10753	
28.75	84.02	30667	

$L_3(1) =$

$L_3(5) = 4317.95$

L4	L5	L6	6
-.2373	1.9443	■■■■■	
.03423	2.3516		
.17493	2.5626		
.35774	2.8369		
.89115	3.6353		
1.1552	4.0315		
1.4586	4.4867		

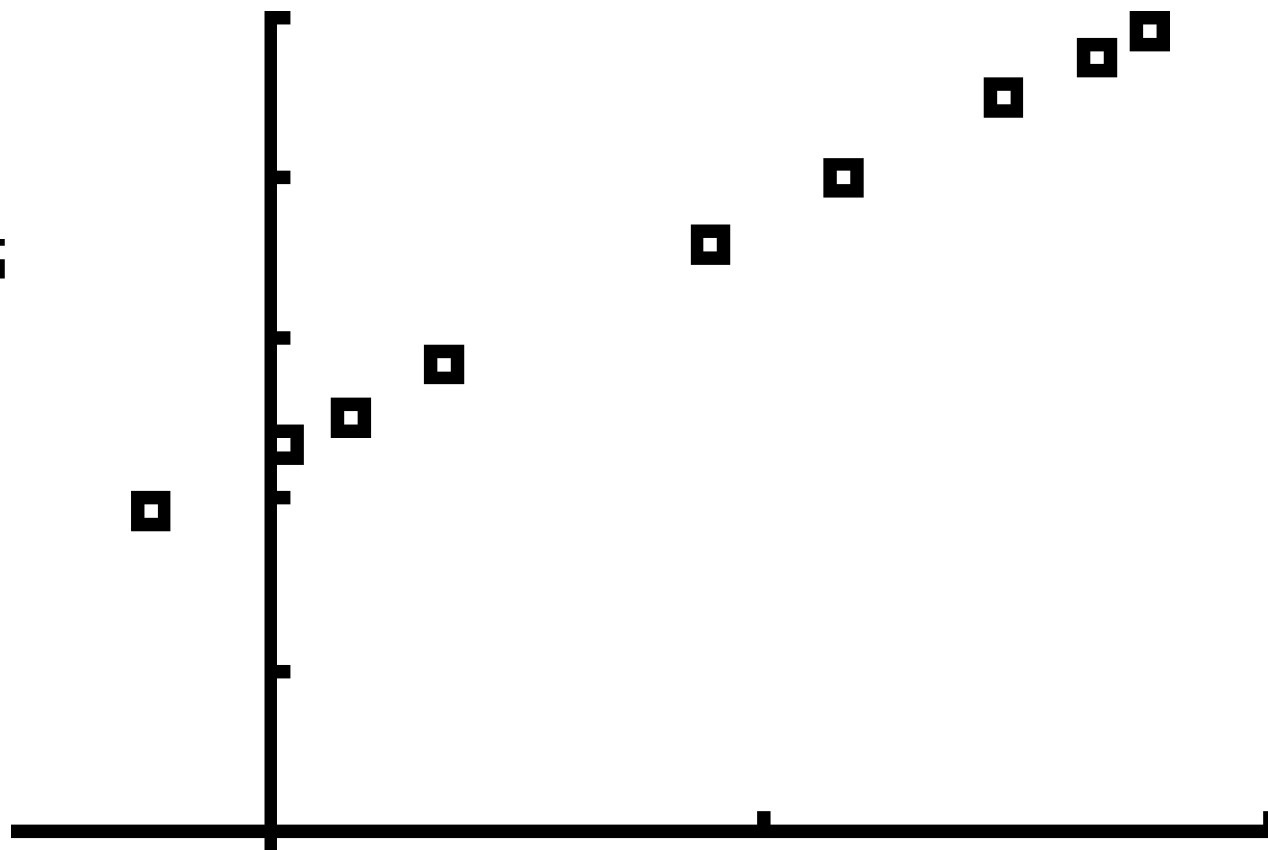
$\log(L_1) \rightarrow L_4$   
 (-.2373214363 ...  
 $\log(L_3) \rightarrow L_5$   
 (1.944334592 2...  
 ■

$L_6(1) =$

# 対数を取ったグラフ

きれいな直線になっています。

```
WINDOW
Xmin=-.5
Xmax=2.5
Xscl=1
Ymin=-.1
Ymax=5.1
Yscl=1
Xres=1
```



# 直線の傾きを計算しよう

0.4075 / 0.2715      1.5001

0.2110 / 0.1407      1.4996

0.2774 / 0.1828      1.5010

0.7983 / 0.5334      1.4965

0.3962 / 0.2640      1.5011

0.4552 / 0.3035      1.4997

0.2924 / 0.1950      1.4995

0.1773 / 0.1184      1.4975

傾きから式をたててみよう

直線のグラフの傾きと切片から

$$\log T = \frac{3}{2} \log R + 2.2988$$

$$2 \log T = 3 \log R + 4.5976$$

対数の公式を使ってケプラーの第三法則を導こう

前ページの式に対数の公式を用いて

$$\log T^2 = \log (R^3 \times 10^{4.5976})$$

よって

$$T^2 = CR^3 \quad C: \text{比例定数}$$

公転周期の二乗は軌道半径の三乗に  
比例する



ケプラーの法則から静止衛星の軌道半径を求めよう I  
まず、月へ適用し、比例定数Cを求める。

①軌道半径  $\times 10^5 \text{km}$       ② 公転周期

R

T

月

3.844

27.32日

静止衛星は、地球の周りを回っているので  
地球とのケプラーの法則での比例定数を求める  
ために、月と地球で比例定数Cを求める。

$$T^2 = CR^3 \quad C:$$

ケプラーの法則から静止衛星の軌道半径を求めよう II  
まず、月へ適用し、比例定数Cを求める。

①軌道半径  $\times 10^5 \text{km}$     ② 公転周期

	R	T
静止衛星	?	1日

求めた比例定数Cから静止衛星の軌道半径Rを求める。

$$T^2 = CR^3 \quad C: 13.14048$$

ケプラーの法則から静止衛星の軌道半径を求めようⅢ  
求めたCを用い、静止衛星の軌道半径を求める。

$$(1/13.14048)^{(1/3)} = 0.42377$$

^ : 電卓のべき乗記号

$$0.42377 \times 10^5 \text{ km} = 42377 \text{ km}$$

現在、静止衛星は、地球の上空  
36000km上を回っているという

この誤差は

$$42377\text{km} - 36000\text{km} = 6377\text{km}$$

大きすぎる。何かまちがっているのでは？

実は、地球の半径6378kmを忘れていた。

上空36000km だからこれを引くと

$$42377\text{km} - 36000\text{km} = 6377\text{km}$$

誤差 わずか 1 km

ケプラーの法則の精度を改めて実感